Matematika, 1997, Jilid 13, hlm. 29–40

Penyelesaian Kamiran Nyata Bagi Persamaan Resapan Kompleks Berpotensi Kuadratik Teritlak Kompleks

Shaharir Mohamad Zain
Jabatan Matematik, Fakulti Sains Matematik
Universiti Kebangsaan Malaysia
36000 UKM Bangi, Selangor, Malaysia

Zainal Abdul Aziz
Jabatan Matematik, Fakulti Sains
Universiti Teknolgi Malaysia
Karung Berkunci 791, 80990 Johor Bahru, Johor, Malaysia

Abstrak Penyelesaian persamaan resapan kompleks berpotensi kuadratik teritlak kompleks diperoleh menerusi kaedah mekanik analisis. Penyelesaian kamiran nyata itu didapati sesuai dengan gagasan kamiran lintasan Feynman.

Katakunci Persamaan resapan kompleks, kamiran lintasan Feynman, potensi kuadratik teritlak kompleks, penyelesaian kamiran nyata, fungsi Green.

Abstract *We obtain solution of a complex diffusion equation with generalised complex quadratic potential, via method of analytical mechanics. The real integral solution conforms to the idea of the Feynman path integral.*

Keywords *Complex diffusion equation, Feynman path integral, generalised complex quadratic potential, real integral solution, Green function.*

1 Pengenalan

Makalah ini menganjurkan penyelesaian tepat berkamiran nyata berbentuk kamiran Feynman (rujuk Feynman [2,3]) dalam ruang Euklidan N^n, bagi persamaan resapan kompleks

$$R_t(\boldsymbol{q},t) = \alpha\Delta R(\boldsymbol{q},t) - \beta V(\boldsymbol{q})R(\boldsymbol{q},t), \quad R(\boldsymbol{q},0) = \phi(\boldsymbol{q}) \tag{1.0}$$

berpotensi kuadratik teritlak kompleks

$$V(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\Omega\,\boldsymbol{q} + \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{q} + P$$

Lambang $\boldsymbol{q}$ mewakili vektor kedudukan titik pada N^n dengan koordinat

$$(q_j), \quad j = 1,2,3,\cdots,n \ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0, \quad \alpha \text{ dan } \beta \in \mathcal{K} \text{ nombor kompleks}$$

Subskrip menandakan terbitan separa dan Δ melambangi Laplacean. Simbol $\boldsymbol{L}$ menandakan suatu vektor, P adalah pemalar kompleks manakala $(1/2)\boldsymbol{q}^T\Omega\boldsymbol{q}$ berupa suatu bentuk kuadratik dengan Ω adalah matriks simetri nyata bersaiz n. (Lihat Finkbeiner [4] dan Prasolov [8], untuk teori terperinci berkaitan konsep bentuk kuadratik itu dan Goldstein [5], bagi penggunaan perwakilan potensi ini bagi masalah sistem dengan darjah kebebasan n. Adalah menjadi kelaziman untuk menyekutukan bentuk kuadratik itu kepada matriks simetri Ω sahaja oleh sebab bahagian simetri pencongnya K tiada sumbangan, $\boldsymbol{q}^T K\boldsymbol{q} = 0$.) Pertimbangan suatu bentuk Hermitean dengan Ω Hermitean dibincangkan dalam Zainal [12].

Berasaskan kepada kaedah umum mekanik analisis yang dilaksanakan terhadap masalah yang sama bagi kasus potensi afin kompleks dalam Zainal [12], maka makalah ini mengemukakan keputusan penting yang bersangkutan bagi potensi kuadratik teritlak kompleks. Kasus matra satu pun dilaporkan dalam Shaharir & Zainal [10,11].

2 Keputusan

Lema berikut digunakan dalam keputusan utama makalah ini.

Lema 1 *Jika suatu sistem dinamik dapat diwakili oleh Lagrangean*

$$\mathcal{L}(\dot\gamma(s),\gamma(s)) = \frac{m}{2}\dot\gamma^2(s) - V(\gamma(s))$$

$\gamma(0) = \boldsymbol{q}_0, \gamma(t) = \boldsymbol{q}$, *dengan* γ *sebagai lintasan yang dilalui zarah berjisim* m *tersebut yang dipengaruhi potensi* V *yang boleh pisah iaitu* $V(\gamma) = \sum_{i=1}^n V_i(\gamma^i)$, *maka secara komponen*

$$\frac{\partial\gamma^i(s)}{\partial t} = -\dot\gamma(s)\int_0^s \frac{d\tau}{(\dot\gamma^i(\tau))^2}\bigg/\int_0^t \frac{d\tau}{(\dot\gamma^i(\tau))^2}, \tag{2.0}$$

$$\frac{\partial\gamma^i(s)}{\partial q^i} = \dot\gamma(s)\int_0^s \frac{d\tau}{(\dot\gamma^i(\tau))^2}\bigg/\left(\dot\gamma^i(t)\right)\int_0^t \frac{d\tau}{(\dot\gamma^i(\tau))^2}, \tag{2.1}$$

Bukti

Keputusan di atas diperlihatkan bagi kasus matra satu dan selanjutnya keputusan untuk matra-n diperolehi dengan memperluaskan keputusan dalam matra satu ini secara komponen demi komponen. Daripada persamaan tenaga

$$T(\dot\gamma(s),\gamma(s)) = \frac{m}{2}\dot\gamma^2(s) + V(\gamma(s)),\ T = \frac{m}{2}\dot\gamma^2(0) + V(q_0),\ q_0 = \gamma(0), \tag{2.2}$$

dengan T adalah fungsi tenaga dan

$$\dot\gamma^2(s) = \left(\frac{2}{m}(T - V(\gamma))\right)$$

atau

$$t = \int_{q_0}^{q} \frac{dz}{\big((2/m)(T - V(z))\big)^{1/2}}, \ \gamma(t) = q \tag{2.3}$$

Jika diambil terbitan (2.3) terhadap q dan t, maka masing-masingnya menghasilkan hubungan, iaitu

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dq}: \quad \frac{1}{[4\alpha\beta(T - V(q))]^{1/2}} - \int_{q_0}^{q} \frac{2\alpha\beta T_q}{[4\alpha\beta(T - V(z))]^{3/2}}\, dz = 0, \\ &(1/\dot{\gamma}(t)) - \frac{T_q}{m} \int_0^t \frac{ds}{\dot{\gamma}^2(s)} = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

dan

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}: \quad \int_{q_0}^{q} \frac{-2\alpha\beta T_t}{[4\alpha\beta(T - V(z))]^{3/2}}\, dz = 1, \\ &\frac{T_t}{m} \int_0^t \frac{ds}{\dot{\gamma}^2(s)} + 1 = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

Jika dipertimbangkan (2.3) dalam bentuk

$$s = \int_{q_0}^{\gamma(s)} \frac{dz}{\big((2/m)(T - V(z))\big)^{1/2}}$$

maka terbitan di atas sebaliknya menghasilkan hubungan

$$\gamma_q(s) = (T_q/m)\dot{\gamma}(s) \int_0^s \frac{d\tau}{\dot{\gamma}^2(\tau)} \tag{2.6}$$

$$\gamma_t(s) = (T_t/m)\dot{\gamma}(s) \int_0^s \frac{d\tau}{\dot{\gamma}^2(\tau)} \tag{2.7}$$

Jelas daripada (2.4) dan (2.6), diperolehi hubungan

$$\gamma_q(s) = \dot{\gamma}(s) \int_0^s \frac{d\tau}{\dot{\gamma}^2(\tau} \Big/ \dot{\gamma}(t) \int_0^t \frac{d\tau}{\dot{\gamma}^2(\tau} \tag{2.8}$$

dan juga daripada (2.5) dan (2.7), diperoleh

$$\gamma_t(s) = \dot{\gamma}(s) \int_0^s \frac{d\tau}{\dot{\gamma}^2(\tau)} \Big/ \int_0^t \frac{d\tau}{\dot{\gamma}^2(\tau} \tag{2.9}$$

Dalam kasus matra$-n$ persamaan tenaga (2.2) dapat ditulis semula sebagai

$$T(\dot{\gamma}(s)) = \sum_{i=1}^{n} T_i(\dot{\gamma}^i, \gamma^i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{2}(\dot{\gamma}^i(s))^2 + V_i(\gamma^i(s)),$$

dengan

$$(\dot{\gamma}^i(s))^2 = \big(\frac{2}{m}(T_i(\dot{\gamma}^i, \gamma^i) - V_i(\gamma^i)\big).$$

Seterusnya diulang hujah (2.3) hingga (2.7) untuk mendapat Lema 1.□

Sistem dinamik dengan potensi afin kompleks dan kuardratik kompleks adalah sistem terkenal yang memenuhi pernyataan Lema 1 di atas. Hubungan berikut (dalam matra$-n$) adalah kesimpulan penting yang terjelma daripada Lema 1 itu :

A. $$\left.\frac{\partial\gamma(s)}{\partial t}\right|_{s=t} = -\dot\gamma(t), \quad \left.\frac{\partial\gamma(s)}{\partial t}\right|_{s=0} = 0, \quad \left.\nabla\cdot\gamma(s)\right|_{s=t} = n, \quad \left.\nabla\cdot\gamma(s)\right|_{s=0} = 0 \qquad (2.10)$$

B. Daripada (2.4) dan (2.5), didapati

$$\nabla_q T\cdot\dot\gamma(t) = -nT_t, \quad \nabla_q \equiv \text{kecer. terhadap } q,$$

dan seterusnya daripada (2.2), diperoleh persamaan terbitan berikut

$$\frac{\partial\gamma(t)}{\partial t} = -\big((\nabla_q\cdot\dot\gamma(t))\dot\gamma(t) + \frac{1}{m}\nabla_q V\big) \qquad (2.11)$$

dengan $\nabla_q\cdot \equiv$ kecap. terhadap $\boldsymbol{q}$.

Seterusnya dikemukakan keputusan utama subseksyen ini.

Teorem 1 *(kasus potensi kuadratik teritlak kompleks menerusi kaedah mekanik analisis)*

(1) Fungsi Green bagi persamaan resapan kompleks (1.0) ialah

$$\mathbb{G}(q,t;q_0,0) = \frac{1}{\vartheta(t)}\,eksp\left(\beta\int_0^t \mathcal{L}(\dot\gamma(s),\gamma(s))\,ds\right) \qquad (2.12)$$

dengan

$$\mathcal{L}(\dot\gamma(s),\gamma(s)) = \frac{m}{2}\dot\gamma^2(s) - V(\gamma(s)) - V(\gamma(s)), \quad V(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\Omega\boldsymbol{q} + \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{q} + P,$$

$m = -(1/2)\alpha\beta$ *jisim zarah yang dipengaruhi* V *potensi kuadratik teritlak kompleks dengan* Ω *suatu matriks simetri nyata,* $\boldsymbol{L}$ *vektor,* P *skalar kompleks,* γ *mewakili lintasan klasik yang memenuhi persamaan Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{ds}(\nabla_{\dot\gamma}\mathcal{L}) - \nabla_\gamma\mathcal{L} = 0, \quad \gamma(0) = \boldsymbol{q}_0,\ \gamma(t) = \boldsymbol{q}$$

manakala

$$\vartheta(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{4\pi\alpha|sin[\sqrt{\Omega}t]|}{|\sqrt{\Omega}|}\right)^{n/2}; & \Omega\neq 0,\ t\in(0,t_{minim}), t_{minim} = minim\ \dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_j}} bagi \\ & \alpha\beta\in N\ dengan\ \alpha\beta<0;\ atau\ t>0\ bagi\ \alpha\beta>0 \\ & \{\ dan\ t_{minim} = minim\ \dfrac{\pi}{kh\sqrt{\lambda_j}}\ \ bagi\ \alpha\beta\in K\},\ dan \\ & matriks\ \big(\alpha((\sqrt{\Omega})^{-1}tan[\sqrt{\Omega}t])\big)\ simetri\ tentu\ positif; \\ & juga\ (\sqrt{\Omega})^2 = \Omega, \\ (4\pi\alpha t)^{n/2}; & \Omega = 0,\ t>0,\ Ny(\alpha)\geq 0. \end{cases}$$

(2) Lebih jelas lagi fungsi Green ini ialah

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{q}_0,0)=\begin{cases}\left(\dfrac{|\sqrt{\Omega}|}{4\pi\alpha|sin[\sqrt{\Omega}t]|}\right)^{n/2} eksp\left[\dfrac{-1}{4\alpha}\Big((\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^T(\sqrt{\Omega}\,tan^{-1}[\sqrt{\Omega}t])(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\right.\\ \qquad -2\boldsymbol{X}^T(\sqrt{\Omega}(sin^{-1}[\sqrt{\Omega}t]+\,tan^{-1}[\sqrt{\Omega}t]))\boldsymbol{Y}\Big)\\ \qquad \left.-\,\dfrac{\beta t}{2}[\boldsymbol{L}^T(\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L}-P]\right] \qquad (2.13a)\\ \qquad \Omega\neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{q}+(\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L},\\ \qquad \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{q}_0+(\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L}\\ \left(\dfrac{1}{4\pi\alpha t}\right)^{n/2} eksp\left[\dfrac{-1}{4\alpha t}(\boldsymbol{q_0}-\boldsymbol{q})^2+\dfrac{\beta t}{2}(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{q_0})\cdot\boldsymbol{L}+\dfrac{\beta\alpha L^2t^2}{12}\right.\\ \qquad \left.+\beta Pt\right];\ \Omega=0 \qquad (2.13b)\end{cases}$$

dengan syarat ke atas α, β dan t yang tersebut dalam 1 di atas.

(3) Penyelesaian persamaan resapan teritlak dalam sebutan "lintasan klasik" yang menampakkan proses stokastik yang melapikinya ialah

$$R(\boldsymbol{q},t)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2\pi|\Sigma(t)|}\right)^{n/2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} eksp\left[\dfrac{-1}{2}\Big(\boldsymbol{Y}-kos^{-1}[\sqrt{\Omega}t]\boldsymbol{X}\Big)^T\Sigma^{-1}\Big(\boldsymbol{Y}-\right.\\ \qquad \left.kos^{-1}[\sqrt{\Omega}t]\boldsymbol{X}\Big)\right]\\ \qquad eksp\left[\beta\int_0^t V(\gamma(s))ds+E(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},t)\right]\phi(\boldsymbol{q}_0)d\boldsymbol{q}_0. \qquad (2.14a)\\ \qquad \Omega\neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2=\Omega,\ \Sigma(t)=4\pi(tan[\sqrt{\Omega}t])^2(\sqrt{\Omega}tan[\sqrt{\Omega}t]\\ \qquad +(\sqrt{\Omega})^2t)^{-1}, \Big(\alpha(\sqrt{\Omega})^{-1}tan[\sqrt{\Omega}t]\Big)\ \textit{matriks simetri}\\ \qquad \textit{semitentu positif dengan } t\in(0,t_{minim}),\\ \qquad t_{minim}=\underset{j}{minim}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_j}}\right)\ \textit{bagi } \alpha\beta\in N\ \textit{dengan } \alpha\beta<0;\\ \qquad \textit{atau } t>0\ \textit{bagi } \alpha\beta>0\{\ \textit{dan } t_{minim}=\underset{j}{minim}\\ \qquad \left(\dfrac{\pi}{kh\sqrt{\lambda_j}}\right)\ \textit{bagi } \alpha\beta\in K\},\ \textit{dan } E(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},t)=\\ \qquad -\tfrac{1}{8\alpha}(\boldsymbol{X}^T(\sqrt{\Omega}\,tan[\sqrt{\Omega}t]))\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{Y}^T(\sqrt{\Omega})^2)+\\ \qquad \tfrac{1}{2}ln\Big(2\,tan[\sqrt{\Omega}t]kos^{-1}[\sqrt{\Omega}t](tan[\sqrt{\Omega}t]+\sqrt{\Omega}t)^{-1}\Big)\\ \left(\dfrac{1}{4\pi\alpha t}\right)^{n/2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} eksp\left[\dfrac{-1}{4\alpha t}(\boldsymbol{q_0}-\boldsymbol{q})^2\right] eksp\left[\beta\int_0^t V(\gamma(s))ds-\dfrac{\beta^2\alpha L^2t^3}{12}\right]\\ \qquad \phi(\boldsymbol{q}_0)\,d\boldsymbol{q}_0 \qquad (2.14b)\\ \qquad \Omega=0,\ t>0,\ \alpha\beta L\in N^n,\ Ny(\alpha)\geq 0\end{cases}$$

atau versi lainnya,

$$R(\boldsymbol{q},t)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2\pi|\Lambda(t)|}\right)^{n/2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} eksp\left[\frac{-1}{2}\left(\boldsymbol{Y}-kos^{-1}[\sqrt{\Omega}t]\boldsymbol{X}\right)^T\Lambda^{-1}\left(\boldsymbol{Y}-\right.\right.\\ \qquad\left.\left.kos^{-1}[\sqrt{\Omega}t]\boldsymbol{X}\right)\right]\\ \qquad eksp\left[2\beta\displaystyle\int_0^t V(\gamma(s))ds+\beta F(\boldsymbol{q}_0,t)\right]\phi(\boldsymbol{q}_0)d\boldsymbol{q}_0. \qquad (2.15a)\\ \qquad \Omega\neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2=\Omega,\ \Lambda(t)=\dfrac{2\pi}{t}(tan[\sqrt{\Omega}t])^2(\sqrt{\Omega})^{-2}),\\ \qquad \alpha(\sqrt{\Omega})^{-1}tan[\sqrt{\Omega}t]\ \mathit{matriks\ simetri\ semitentu}\\ \qquad \mathit{positif\ dengan}\ t\in(0,t_{minim}),t_{minim}=\underset{j}{minim}.\\ \qquad \left(\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_j}}\right)\ \mathit{bagi}\ \alpha\beta\in N\ \mathit{dengan}\ \alpha\beta<0;\mathit{atau}\ t>0\ \mathit{bagi}\\ \qquad \alpha\beta>0\{\ \mathit{dan}\ t_{minim}=\ \underset{j}{minim}\left(\dfrac{\pi}{kh\sqrt{\lambda_j}}\right)\ \mathit{bagi}\ \alpha\beta\in K\}\\ \qquad \mathit{dan}\ F(\boldsymbol{q}_0,t)=\dfrac{1}{2}V(\boldsymbol{q}_0)t+\dfrac{1}{2\beta}ln\left(\dfrac{1}{t}(\sqrt{\Omega})^{-1}tan[\sqrt{\Omega}t]\right.\\ \qquad\qquad \left.kos^{-1}[\sqrt{\Omega}t])\right)\\ \left(\dfrac{1}{4\pi\alpha t}\right)^{n/2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} eksp\left[\frac{-1}{4\alpha t}[\boldsymbol{q}_0-(\boldsymbol{q}-\alpha\beta t^2\boldsymbol{L})]^2\right]\\ \qquad eksp\left[2\beta\displaystyle\int_0^t V(\gamma(s))ds+t\beta V(\boldsymbol{q}_0)\right]\phi(\boldsymbol{q}_0)d\boldsymbol{q}_0\\ \qquad \Omega=0,\ t>0,\ \alpha\beta L\in N^n,\ Ny(\alpha)\geq 0 \qquad (2.15b)\end{cases}$$

dengan I matriks identiti.

Bukti (1)

$\mathbb{G}$ dalam Teorem 1 di atas memenuhi persamaan resapan kompleks (1.0) mengimplikasikan

$$\frac{\dot{\vartheta}(t)}{\vartheta(t)}=-\frac{1}{4\alpha}\dot{\gamma}^2(t)-\frac{1}{2\alpha}\dot{\gamma}\cdot\gamma_t\Big|_{s=0}^{s=t}-\frac{1}{4\alpha}\left(\dot{\gamma}\ \nabla\cdot\gamma\Big|_{s=0}^{s=t}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\nabla\cdot\left(\dot{\gamma}\ \nabla\cdot\gamma\Big|_{s=0}^{s=t}\right),\quad \nabla,\ \text{kecap. terhadap } \boldsymbol{q}, \qquad (2.16)$$

apabila γ memenuhi persamaan Euler-Lagrange bagi $\mathfrak{L}$ dalam hipotesis Teorem 1 itu. Seterusnya daripada Lema 1 dengan (2.0) dan (2.1) yang membuahkan syarat (sama ada mengira bulat-bulat γ ataupun menggunakan persamaan tenaga (2.2)) berupa hubungan-hubungan (2.10).

Persamaan (2.16) dan (2.10) memberikan

$$\frac{\dot\vartheta(t)}{\vartheta(t)} = \frac{1}{2}\nabla\cdot\dot\gamma(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}D^{-1}\dot D(t),\ \Omega\neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2=\Omega \\ \qquad D^{-1}(t)=\sin^{-1}[\sqrt{\Omega}t],\ \text{iaitu} \\ \qquad \text{dengan } t\in(0,t_{\text{minim}}), t_{\text{minim}} = \underset{j}{\text{minim}} \\ \qquad \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_j}}\right) \text{ bagi } \alpha\beta\in N \text{ dengan } \alpha\beta<0; \\ \qquad \text{atau } t>0 \text{ bagi } \alpha\beta>0\{ \text{ dan} \\ \qquad t_{\text{minim}} = \ \underset{j}{\text{minim.}} \left(\frac{\pi}{kh\sqrt{\lambda_j}}\right) \text{ bagi } \alpha\beta\in K\,\} \\ \frac{1}{2t},\ \Omega=0,\ t>0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Persamaan di bahagian akhir (2.17) diperolehi dengan menghisab $\dot\gamma(t)$ daripada lintasan klasik sistem ini dengan bulat-bulatnya atau dengan menyelesaikan persamaan terbitan untuk $\boldsymbol{h}=\dot\gamma(t)$ yang memenuhi persamaan

$$n\boldsymbol{h}_t = -\boldsymbol{h}\ \nabla\cdot\boldsymbol{h} + 2\alpha\beta(\Omega\boldsymbol{q}+L) \tag{2.18}$$

Yang boleh diterbitkan menerusi ungkapan tenaga (2.2). Persamaan (2.17) atau (2.18) memberikan ungkapan ϑ setelah pemalarnya ditentukan dan apabila disyaratkan supaya $\mathbb{G}$ pada $t=0$ semestinya fungsi delta $\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0)$ yang juga memberikan syarat-syarat seperti dalam Teorem 1.

Bukti (2)

Ungkapan $\mathbb{G}$ dalam sebutan $\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_0,t$ secara bulat-bulat dalam Teorem 1 boleh didapati dengan menghitung $\mathbb{G}$ dalam sebutan Lagrangean itu dengan menggunakan lintasan klasik sistem γ yang dipertimbangkan ini, malah seseorang boleh mendapatkan

$$\int_0^t \dot\gamma^2(s)ds = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big((\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^T\sqrt{\Omega}\tan^{-1}[\sqrt{\Omega}t]\ (\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) - 2\boldsymbol{X}^T\sqrt{\Omega}(\sin^{-1}[\sqrt{\Omega}t] + \\ \quad \tan^{-1}[\sqrt{\Omega}t])\boldsymbol{Y}\Big) + \frac{t}{2}\Big((\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^T(\sqrt{\Omega}\sin^{-1}[\sqrt{\Omega}t])^2(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) - \\ \quad 2\boldsymbol{X}^T(\text{kos}[\sqrt{\Omega}t]+I)(\sqrt{\Omega}\sin^{-1}[\sqrt{\Omega}t])^2\boldsymbol{Y}\Big)\ \text{ jika } \Omega\neq 0, \\ \quad (\sqrt{\Omega})^2=\Omega,\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{q}+(\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{q}_0+(\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L}. & (2.19a) \\ t\left(U^2-(t/m)\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{L}+(1/3)\,(Lt/m)^2\right),\ \text{jika } \Omega=0,\ \text{dan} \\ \qquad t\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0+(1/2m)\boldsymbol{L})\,. & (2.19b) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{Y}-\text{kos}^{-1}[\sqrt{\Omega}t]\boldsymbol{X}\Big)^T\sqrt{\Omega}\Big(\boldsymbol{Y}-\text{kos}^{-1}[\sqrt{\Omega}t]\boldsymbol{X}\Big) + \\ \quad \frac{1}{2}\boldsymbol{X}^T\sqrt{\Omega}\tan[\Omega t]\boldsymbol{X} + \frac{1}{2}\boldsymbol{Y}^T(\sqrt{\Omega})^2\boldsymbol{Y} + \frac{t}{2}\Big(\boldsymbol{Y}-\text{kos}^{-1}[\sqrt{\Omega}t]\boldsymbol{X}\Big)^T \\ \quad (\sqrt{\Omega}\tan^{-1}[\sqrt{\Omega}t])^2\Big(\boldsymbol{Y}-\text{kos}^{-1}[\sqrt{\Omega}t]\boldsymbol{X}\Big), \\ \qquad \Omega\neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2=\Omega & (2.20a) \\ \frac{(\boldsymbol{q_0}-\boldsymbol{q})^2}{t} + \frac{L^2t^3}{12m^2},\quad \Omega=0 & (2.20b) \end{cases}$$

$$\int_0^t V(\gamma(s))ds = \begin{cases} \frac{-1}{4}\Big((\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^T \tan^{-1}[\sqrt{\Omega}](\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) - 2X^T(\sin^{-1}[\sqrt{\Omega}t] \\ \quad +\tan^{-1}[\sqrt{\Omega}t])\boldsymbol{Y}\Big) + \frac{1}{2}\Big((\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^T(\sin^{-1}[\sqrt{\Omega}t])^2\sqrt{\Omega}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) \\ \quad - 2\boldsymbol{X}^T(\mathrm{kos}[\sqrt{\Omega}t]+I)\ (\sin^{-1}[\sqrt{\Omega}t])^2\sqrt{\Omega}\boldsymbol{Y}\Big) \\ \quad - \frac{1}{2}\boldsymbol{L}^T(\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L} + P, \Omega \neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2 = \Omega. & (2.21a) \\ \dfrac{t(\boldsymbol{q_0}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{L}}{2} + \dfrac{L^2t^3}{12m} + Pt, \qquad \Omega = 0 & (2.21b) \end{cases}$$

Persamaan (2.19)-(2.21) dan (2.12) memberikan $\mathbb{G}$ dalam (2.13) (dengan pilihan pemalar kamiran itu supaya $\mathbb{G}(t=0) = \delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}_0)$).

Bukti (3)

Penyelesaian dalam sebutan lintasan klasik diperoleh dengan mengira bahagian tenaga kinetik daripada ungkapan $\mathbb{G}$, iaitu

$$\mathrm{eksp}\left[\frac{\beta m}{2}\int_0^t \dot{\gamma}^2 ds\right]$$

daripada persamaan (2.19)-(2.20). Versi lain diperoleh menerusi hubungan

$$\frac{m}{2}\dot{\gamma}^2(s) - V(\gamma(s)) = \frac{m}{2}\dot{\gamma}^2(0) + V(\boldsymbol{q}_0) - 2V(\gamma(s))$$

dan $\dot{\gamma}(0)$ boleh dihisab terus daripada lintasan klasik atau daripada penyelesaian $\boldsymbol{u} = \dot{\gamma}(0)$ kepada persamaan yang diterbitkan daripada ungkapan tenaga (2.2) :

$$n\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}\nabla\cdot\boldsymbol{u} - 2\alpha\beta(\Omega\boldsymbol{q}_0 + \boldsymbol{L}), \quad \nabla, \text{kecap. terhadap } \boldsymbol{q}_0.\square$$

Jelas daripada Teorem 1, fungsi Green (seperti bentuk (2.14a)) tidak tertakrif apabila t bersamaan dengan punca persamaan fungsi matriks $\sin[\sqrt{\Omega}t] = 0$, khususnya yang terjadi apabila nilai eigen Ω berupa nombor nyata sebagaimana terjadi buat kasus persamaan Schrödinger. Dalam kasus ini, fungsi Green tidak tertakrif pada pilihan t bersamaan dengan punca persamaan $\sin[\sqrt{\Omega}t] = 0$. Teorem berikut memberikan fungsi Green yang menjadi pelengkap kepada fungsi Green dalam Teorem 1, iaitu disediakan G yang tertakrif pada pilihan t sehinggakan fungsi matriks $\sin[\sqrt{\Omega}t] = 0$, yang tentunya benar untuk kasus persamaan Schrödinger.

Teorem 2 *(pelengkap fungsi Green (2.13))*

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{q}, t; \boldsymbol{q}_0, t_0) = \frac{1}{\vartheta(\tau)} eksp\left(\beta\int_0^t \mathfrak{L}(\dot{\gamma}(s), \gamma(s))ds\right),\ t > t_0,\ \tau = t - t_0$$

ialah fungsi Green bagi persamaan resapan kompleks (1.0) dengan syarat awal $R(\boldsymbol{q}_0, t_0) = \phi(\boldsymbol{q}_0)$, *manakala* $\mathfrak{L}$ *dan* γ *seperti dalam Teorem 1, tetapi dengan syarat sempadan lintasan klasik*

$$\gamma(t_0) = \boldsymbol{q}_0, \quad \gamma(t) = \boldsymbol{q},$$

dan

$$\vartheta(\tau) = \begin{cases} \left(\dfrac{-2\pi|sin[\sqrt{\Omega}t]|}{\beta m|\sqrt{\Omega}|}\right)^{n/2}, & \Omega \neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2 = \Omega,\ \tau \in (0, t_{minim}), \\ & t_{minim} = \underset{j}{minim}\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda_j}}\right)\ bagi\ \alpha\beta \in N \\ & dengan\ \alpha\beta < 0;\ atau\ t > 0\ bagi\ \alpha\beta > 0 \\ & \{dan\ t_{minim} = \underset{j}{minim}\left(\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda_j}}\right)\ bagi\ \alpha\beta \in K\} \\ \big(4\alpha\tau\big)^{n/2}, & \Omega = 0,\ \tau > 0 \end{cases}$$

Dalam sebutan $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}_0, \tau$ *secara terang-terangnya, dengan*

$$\tau \in (0, t_{minim}),\ \ t_{minim.} = \underset{j}{minim.}\big(\pi/(2\sqrt{\lambda_j})\big)$$

bagi $\alpha\beta \in N$ *dengan* $\alpha < 0$; *atau* $\tau > 0$ *bagi* $\alpha\beta > 0$ $\{$*dan* $t_{minim} = \underset{j}{minim.}\big(\pi/2kh\sqrt{\lambda_j}\big)$ *bagi* $\alpha\beta \in K\}$,

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{q}, t : \boldsymbol{q}_0, t_0) = \begin{cases} \left(\dfrac{-\beta m|\sqrt{\Omega}|}{2\pi|sin[\sqrt{\Omega}\tau]|}\right)^{n/2} eksp\left[\dfrac{\beta m}{2}\Big((\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^T\sqrt{\Omega}tan^{-1}[\sqrt{\Omega}\tau](\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\right. \\ \quad -2\boldsymbol{X}^T\sqrt{\Omega}(sin^{-1}[\sqrt{\Omega}\tau] + tan^{-1}[\sqrt{\Omega}\tau])\boldsymbol{Y}\Big) - \\ \quad \left.\beta\tau[\tfrac{1}{2}\boldsymbol{L}^T(\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L} - P]\right], \\ \qquad \Omega \neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2 = \Omega \qquad\qquad (2.22a) \\ \quad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{q} + (\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L}, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{q}_0 + (\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L},\ matriks \\ \quad \Big(\alpha(\sqrt{\Omega})^{-1}tan[\sqrt{\Omega}\tau]\Big)\ simetri\ semitentu\ positif; \\ \left(\dfrac{1}{4\pi\alpha\tau}\right)^{n/2} eksp\left[\dfrac{-1}{4\alpha\tau}(\boldsymbol{q_0} - \boldsymbol{q})^2 + \dfrac{\beta\tau}{2}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q_0})\cdot\boldsymbol{L}\right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\beta\alpha L^2\tau^3}{12} + \beta P\tau\right], \qquad\qquad (2.22b) \\ \quad \Omega = 0,\ \tau > 0,\ \alpha\beta L \in N^n,\ Ny(\alpha) \geq 0. \end{cases}$$

Bukti

Serupa dengan pembuktian Teorem 1.$\square$

3 Ulasan

a) Secara terang-terang, fungsi Green (2.13a) boleh ditulis sebagai

$$\mathbb{G}(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{q}_0,0)=\begin{cases}\Big(\dfrac{|\sqrt{\Omega}|}{4\alpha\pi|\sinh[\sqrt{\Omega}t]|}\Big)^{n/2}\text{eksp}\Big[\frac{-1}{4\alpha}\Big((\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^T\sqrt{\Omega}\tan^{-1}[\sqrt{\Omega}t](\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})- \\ \quad 2\boldsymbol{X}^T\sqrt{\Omega}(\sin^{-1}[\sqrt{\Omega}t]+\tan^{-1}[\sqrt{\Omega}t])\boldsymbol{Y}\Big)- \\ \quad \frac{\beta t}{2}[\boldsymbol{L}^T(\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L}-P]\Big],\ \text{matriks} \\ \quad \Big(\alpha(\sqrt{\Omega})^{-1}\tan[\sqrt{\Omega}t]\Big)\geq 0,\ \Omega\neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2=\Omega, \\ \quad \text{dengan } t\in(0,t_{\text{minim}});\ t_{\text{minim}}=\underset{j}{\text{minim}}\big(\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_j}}\big) \\ \quad \text{bagi } \alpha\beta\in N \text{ dengan } \alpha\beta<0 \qquad (3.0a) \\ \quad \{\text{dan } t_{\text{minim}}=\underset{j}{\text{minim}}\big(\dfrac{\pi}{\sqrt{kh\lambda_j}}\big) \text{ bagi } \alpha\beta\in K\},\ \text{atau} \\ \Big(\dfrac{|\sqrt{\mu}|}{4\alpha\pi|\sinh[\sqrt{\mu}t]|}\Big)^{n/2}\text{eksp}\Big[\dfrac{-1}{4\alpha}\Big((\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})^T\sqrt{\mu I}\tanh^{-1}[\sqrt{\mu I}t](\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) \\ \quad -2\boldsymbol{X}^T\sqrt{\mu I}(\sinh^{-1}[\sqrt{\mu I}t]+\tanh^{-1}[\sqrt{\mu I}t])\boldsymbol{Y}\Big)- \\ \quad \dfrac{\beta t}{2}[\boldsymbol{L}^T(\sqrt{\mu I})^{-1}\boldsymbol{L}-P]\Big],\ \text{bagi } \Omega=-\mu I,\ \text{dengan} \\ \quad \text{matriks } \Big(\alpha(\sqrt{\mu I})^{-1}\tanh[\sqrt{\mu I}t]\Big)\Big)\geq 0,\ \mu\in N \\ \quad \text{dan } t>0 \text{ bagi } \alpha\beta>0. \qquad (3.0b)\end{cases}$$

untuk kasus $\Omega\neq 0,\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{q}+(\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L},\ \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{q}_0+(\sqrt{\Omega})^{-1}\boldsymbol{L}.$

Bagi kasus $\Omega=-\mu I,\ \mu\in N$, (kasus resapan klasik teritlak) penyelesaian persamaan resapan kompleks (2.14a) diberikan oleh

$$R(\boldsymbol{q},t)=\Big(\frac{1}{2\pi|\Sigma(t)|}\Big)^{n/2}\int_{-\infty}^{\infty}\text{eksp}\Big[\frac{-1}{2}\Big(\boldsymbol{Y}-\text{kosh}^{-1}[\sqrt{\mu I}]\,\boldsymbol{X}\Big)^T\Sigma^{-1}$$
$$\Big(\boldsymbol{Y}-\text{kosh}^{-1}[\sqrt{\mu I}t]\boldsymbol{X}\Big)\Big]\text{eksp}\Big[\beta\int_0^t V(\gamma(s))ds+E(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},t)\Big]\phi(\boldsymbol{q}_0)d\boldsymbol{q}_0, \tag{3.1}$$

$\mu I\neq 0,\ \Sigma(t)=4\alpha(\tanh[\sqrt{\mu I}t])^2(\sqrt{\mu I}\tanh[\sqrt{\mu I}t]+(\sqrt{\mu I})^2t)^{-1},$
matriks $\Big(\alpha(\sqrt{\mu I})^{-1}\tanh[\sqrt{\mu I}t]\geq 0,\ t>0$ bagi $\alpha\beta>0$, dan

$$E(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},t)=\frac{1}{8\alpha}(\boldsymbol{X}^T\sqrt{\mu I}\tanh[\sqrt{\mu I}t]\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{Y}^T\mu I\boldsymbol{Y})$$
$$\frac{1}{2}\ln\Big(2\tanh[\sqrt{\mu I}t]\text{kosh}^{-1}[\sqrt{\mu I}t](tanh[\sqrt{\mu I}t]+\sqrt{\mu I}t)^{-1}\Big)$$

Ungkapan (3.1) menyerupai bentuk kamiran lintasan Feynman (lihat Feynman [3]), cuma berbeza daripada segi domain kamiran sahaja. Sementara itu, persamaan (3.1) juga boleh ditulis semula sebagai rumus Feynman-Kac atau kamiran Weiner (lihat Nagasawa [7]). Jika dipertimbangkan $\alpha=i\hbar/(2m)$ dan $\beta=i/\hbar$, khayal tulen, dalam fungsi Green (3.0a), maka diperoleh fungsi Green bagi kasus persamaan Schrödinger (teritlak). Melalui penyelesaian (2.14a) dengan pertimbangan yang dinyatakan diperoleh penyelesaian persamaan Schrodinger (teritlak) yang menyerupai bentuk kamiran lintasan Feynman.

b) Secara formalnya, kita masih boleh mengungkapkan keputusan (2.14) itu sebagai

$$R(\boldsymbol{q},t)=\begin{cases}\mathbb{J}_{N[\text{kos}^{-1}[\sqrt{\Omega}t]X,\Sigma(t)]}\Big(\text{eksp}\Big[\beta\int_0^t V(\gamma(s))ds\Big]\mathbb{E}(\cdot,\boldsymbol{X},t)\phi(\cdot)\Big)\Big), & \\ \qquad\qquad \Omega\neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2=\Omega, & (2.23a)\\ \mathbb{J}_{N[q,\Sigma(t)]}\Big(\text{eksp}\Big[\beta\int_0^t V(\gamma(s))ds\Big]\mathbb{E}(t)\phi(\cdot)\Big),\Omega=0, & (2.23b)\end{cases}$$

yang masing-masing merupakan jangkaan formal terhadap 'taburan multinormal kompleks' (lihat Kingman & Taylor [6], Shaharir [9], Andersen et al [1]), $N[\text{kos}^{-1}[\sqrt{\Omega}t]]\boldsymbol{X},\Sigma(t)]$ dan $N[\boldsymbol{q},2\alpha t]$, dengan min bersamaan dengan $\text{kos}^{-1}[\sqrt{\Omega}t]\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{q}$, dan matriks varians-kovarians $\Sigma(t)$ bersamaan dengan matriks

$$4\alpha(\sqrt{\Omega})^{-1}(\tan[\sqrt{\Omega}t])^2(\tan[\sqrt{\Omega}t]+\sqrt{\Omega}t)^{-1}\quad\text{dan}\quad 2\alpha tI$$

masing-masingnya.

Secara formal juga, kedua-dua ungkapan (2.23a,b) sejajar dengan perspektif Nagasawa [7], dan sayugianya membayangkan adanya proses stokastik yang melapiki resapan kompleks (1.0) berpotensi kuadratik teritlak kompleks itu, walaupun kami belum dapat mengecam secara terperinci bentuk proses stokastik itu. Khususnya, bagi kasus resapan klasik teritlak didapati resapan dilapiki oleh proses Wiener tidak piawai. Manakala kasus persamaan Schrödinger (teritlak), tidak formalnya keputusan kami membayangkan adanya 'proses stokastik Schrodinger' yang melandasi resapan kompleks itu. Kami berharap dapat memperincikan lagi hal-hal ini dalam penerbitan-penerbitan kami seterusnya. Walau apapun hasil (2.15)-(2.16) itu adalah realisasi penyelesaian kamiran Feynman yang tepat dalam sebutan kamiran nyata (bukan kamiran fungsian) berlintasan klasik bagi persamaan resapan kompleks (1.0) berpotensi kuadratik teritlak kompleks, yang berupa suatu penyatuan penyelesaian yang baru.

c) Keputusan-keputusan di atas bagi kasus potensi afin kompleks dan kuadratik teritlak kompleks mengesyorkan betapa fungsi Green dalam sebutan Lagrangean ialah Lagrangean yang ada sebutan $\dfrac{dF}{ds}$, tegasnya

$$G(\boldsymbol{q},t;\boldsymbol{q}_0,0)=\text{eksp}\Big[\beta\int_0^t\Big(\mathcal{L}(s,\gamma(s),\dot{\gamma}(s))+\frac{d}{ds}F(s,\gamma(s),\dot{\gamma}(s))\Big)ds\Big],$$

dengan

$$F(t)=\frac{1}{\beta}\ln\Big(\frac{1}{2\pi|\Sigma(t)|}\Big)^{n/2},$$

$\Omega\neq 0,\ (\sqrt{\Omega})^2=\Omega, t\in(0,t_{\text{minim}})$, $t_{\text{minim}}=\underset{j}{\text{minim}}(\dfrac{\pi}{\sqrt{\lambda_j}})$ bagi $\alpha\beta\in N$ dengan $\alpha\beta<0$; atau $t>0$ bagi $\alpha\beta>0$ { dan $t_{\text{minim}}=\underset{j}{\text{minim}}(\dfrac{\pi}{kh\sqrt{\lambda_j}})$ bagi $\alpha\beta\in K$}, untuk potensi kuadratik; dan

$$F(t)=-\frac{n}{2}\ln(4\pi\alpha t)$$

$\Omega = 0,\ t > 0,\ \alpha\beta L \in N^n$, bagi potensi afin kompleks. Keputusan ini akan dihalusi lagi dalam penerbitan lain.

Rujukan

[1] H.H. Andersen, M. Højbjerre, D. Sorensen & P.S. Eriksen, *Linear and graphical models for the multivariate complex normal distribution,* Springer-Verlag, New York 1995.

[2] R.P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics,* Rev. of Mod. Phys. **20** (1948), 367-387.

[3] R.P. Feynman & A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals,* McGraw-Hill, New York, 1965.

[4] D.T. Finbeiner II, *Introduction to matrices and linear transformations,* W.H. Freeman, New York, 1966.

[5] H. Goldstein, *Classical mechanics. Edisi kedua,* Addison-Wesley Pub., Reading, 1980.

[6] J.F.C. Kingman & S.J. Taylor, *Introduction to measure and probability,* Cambridge univ. Press, 1966.

[7] M. Nagasawa, *Schrödinger equations and diffusion theory,* Birkhauser Verlag, Basel, 1993.

[8] V.V. Prasolov, *Problems and theorems in linear algebra* American Mathematical Soc., Providence, 1989.

[9] M.Z. Shaharir, *On complex normal distribution,* Sains Malaysiana, **16**, (1987), 397-408.

[10] M.Z. Shaharir & A.A. Zainal, *On the exact integral solution of the generalised linear diffusion equation,* Sing. J. Phys. **11** (1995), 81-91.

[11] M.Z. Shaharir & A.A. Zainal, *Real integral solution in term of classical path for a diffusion model with quadratic potential in one-dimensional Euclidean space,* J.Fiz. Mal. **16** (1995), 43-58.

[12] A.A. Zainal, *Penyelesaian persamaan resapan kompleks yang sesuai dengan gagasan kamiran lintasan Feynman,* Tesis Dr. Fal., Jab. Matematik, UKM, Bangi, 1997.